На правах рукописи

АБАШКИН Антон Александрович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика" ФГБОУ ВПО Самарский государственный архитектурно-строительный университет

Научный руководитель:	Репин Олег Александрович, доктор физико-математических наук профессор, ФГБОУ ВПО СГАСУ
Официальные оппоненты:	Капустин Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук доцент, ФГБОУ ВПО МГУ
	Плещинский Николай Борисович доктор физико-математических наук профессор, ФГБОУ ВПО КФУ
Ведущая организация:	Федеральное бюджетное учреждение высшего профессионального образования Орловский государственный университет

Защита состоится 20 июня 2013 года в 14:30 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, НБ КФУ)

Автореферат разослан «__» мая 2013 года и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д.212.081.10
к. ф.-м. н., доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Предметом исследования в данной диссертации являются некоторые краевые задачи в прямоугольных областях, часть границы которых лежит на линиях $x = 0$ и $y = 0$, для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$H_{\mu,p}^{\lambda}(u(x,y)) = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{y}u_y + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где μ, p, λ - действительные числа, на которые в дальнейшем будут наложены ограничения.

Коэффициенты данного уравнения имеют особенности на линиях $x = 0$ и $y = 0$, такие уравнения называют уравнениями с сингулярными коэффициентами.

Ввиду наличия многочисленных приложений, в современной теории дифференциальных уравнений с частными производными значительное место занимают исследования вырождающихся уравнений, особый класс которых и составляют уравнения с сингулярными коэффициентами.

Приведем несколько примеров, раскрывающих причины интереса к уравнению (1).

1) Если перевести уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в R^3 в цилиндрические координаты, то получим уравнение $u_{zz} + u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}u + k^2 u = 0$. При рассмотрении не зависящих от φ, то есть осесимметрических, решений полученного уравнения приходим к частному случаю уравнения (1), поэтому уравнение (1) имеет важное значение для изучения осесимметрических волновых процессов.

2) При $\mu = 0$, $p = \frac{1}{2}$, $\lambda < 0$ уравнение (1) описывает распространение радиоактивной эманации в атмосфере[1], при этом $u(x,y)$ является концентрацией радиоактивной эманации, а λ - постоянной распада.

3) Поиск монохроматических решений $U(x,y,t) = u(x,y)e^{\pm i\lambda t}$ волнового оператора Даламбера $\Delta U - U_{tt}$ в пространстве R^{m+n} с координатами

[1] Александрович И. Н. О решении краевых задач для уравнения Гельмгольца // Сборник трудов научной конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" Канев. 1974. С. 78–86

$(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$, временной координатой t и частными расстояниями $x^2 = x_1^2 + ... + x_m^2$, $y^2 = y_1^2 + ... + y_n^2$ сводится к нахождению решений двуосесимметрического уравнения Гельмгольца ($2\mu = m - 1$, $2p = n - 1$).

4) Уравнение (1) связано с уравнением смешанного типа

$$t^\alpha u_{ss} + s^\beta u_{tt} + \lambda u = 0, \tag{2}$$

а именно, если в области эллиптичности привести уравнение (2) к канонической форме, то получим уравнение (1).

При $\beta, \lambda = 0$ уравнение (2) называется уравнением Геллерстедта.

В случае $\beta, \lambda = 0$, $\alpha = 1$ уравнение (2) называется уравнением Трикоми и имеет важное прикладное значение для газодинамики.

Отметим также, что общей теории уравнений с сингулярными коэффициентами на данный момент еще не создано.

Таким образом, актуальность изучения краевых задач для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца (1) обусловлена:

1) его востребованностью в приложениях;

2) его связью с классическими уравнениями математической физики и уравнениями смешанного типа;

3) отсутствием общей теории для уравнений данного типа.

Степень разработанности темы исследования.

Краевые задачи для различных частных случаев уравнения (1) были предметом интереса многих математиков. Так, в 1952 году М.Б. Капилевичем[2] была решена задача Дирихле для уравнения $\Delta u + \frac{a}{x_n} u_{x_n} - b^2 u = 0, \quad a < 1$ в полуплоскости $y > 0$.

Теория краевых задач для частных случаев уравнения (1) активно разрабатывалась и силами самарских математиков. С.П. Пулькин[3] исследовал краевые задачи типа Е для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$, в двух областях, первая из которых ограничена отрезком $x = 0$, $-b < y < b$ и кривой Γ_0 с концами в точках $(0, b)$ и $(0, -b)$, вторая - отрезками $x = 0$, $0 < y < b$

[2]Капилевич М. Б. об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник. 1952. №1. С.11-38.

[3]Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, 1958. Вып.21. С.3–54.

и $y = 0$, $0 < x < 1$ и кривой Г, соединяющей точки $(0, b)$ и $(1, 0)$. Была доказана однозначная разрешимость данных задач.

Также краевым задачам для частных случаев уравнения (1) посвящены работы В.В. Азовского, А.Д. Бочкарева, В.Ф. Волкодавовова, Л.Е. Востровой, М.В. Коржавиной, И.А. Макарова, В.А. Носова и др.

Отметим исследования О.А. Маричева[4] для уравнения (1) при $\lambda \geq 0$, в которых построены решения сингулярных задач типа Неймана и Дирихле в полуплоскости $y > 0$, квадранте $x > 0$, $y > 0$ и задачи Дирихле в полукруге $\{x^2 + y^2 < a^2,\ y > 0\}$ для случая $\lambda = 0$.

В работах М.Е. Лернера, О.А. Репина[5] и Е.И. Моисеева[6] изучена краевая задача с нелокальным условием типа Бицадзе-Самарского в вертикальной полуполосе для уравнения (1) при $\lambda < 0$, $\mu = 0$, доказана ее однозначная разрешимость.

Для уравнения (1) при $\lambda < 0$ в статье М.Е. Лернера и О.А. Репина[7] доказана однозначная разрешимость и найдены формулы для решения задачи Дирихле в первом квадранте.

Краевыми задачами для уравнения (1) и его частных случаев, занимались Н.Б. Плещинский, Н.Р. Раджабов, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, Р.С. Хайруллин, А. Хасанов и др.

Выделим следующие особенности, присущие многим работам по данной теме:

1) из-за поведения решений вблизи линий $x = 0$ и $y = 0$ при некоторых значениях коэффицентов μ и p на данных линиях задаются условия с весом;

2) другой вариант постановки краевых задач, который многократно встречается в публикациях, это задачи типа E, в которых на прямых $x = 0$

---

[4] Маричев О. И. Сингулярные краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1976. Т.230 №3. С.523-526.

[5] Лернер М. Е., Репин О. А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравненя. 2001. Т.37. С.1562–1564.

[6] Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравненя. 2001. Т.37. С.1565–1567

[7] Лернер М. Е., Репин О. А. О задаче Дирихле для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте // Вестник Самарского Технического Университета. 1998. №6. С.5-8.

и (или) $y = 0$ требуется только ограниченность искомой функции.

Цели работы.

Целями диссертационной работы являются:

1) нахождение условий существования и условий единственности решения некоторых краевых задач для уравнения (1) в следующих областях:

- в прямоугольнике $D_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < a, \ \ 0 < y < b\}$;
- в вертикальной полуполосе $D_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < a, \ \ 0 < y < \infty\}$;
- в вертикальной полосе $D_3 = \{(x, y) \mid 0 < x < a \ \ y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$;
- в первом квадранте $D_4 = \{(x, y) \mid 0 < x < \infty, \ \ 0 < y < \infty\}$.

2) построение решений данных задач в виде рядов и интегралов.

Научная новизна.

В данной работе поставлены и исследованы новые краевые задачи для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в прямоугольнике, полуполосе и полосе. Отличительной особенностью исследованных в диссертации краевых задач является то, что на параметры уравнения (1) p, μ и λ накладываются минимальные ограничения.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Результаты работы носят теоретический характер и могут быть востребованы при дальнейшей разработке теоретических вопросов, связанных как с двуосесимметрическим уравнением Гельмгольца, так и с подобными и обобщающими его уравнениями. Методы и результаты работы также могут быть использованы при исследовании краевых задач в областях, содержащих участки линий вырождения в качестве части границы.

Методы исследования.

В диссертационном исследовании были применены:

1) метод Фурье;

2) метод интегральных преобразований;

3) аппарат специальных функций;

4) спектральный метод;

5) принцип максимума для эллиптических уравнений.

Положения, выносимые на защиту.

1) Теоремы существования и единственности решения следующих краевых задач:

- задач типа Дирихле с весовыми условиями на линиях сингулярности $x = 0$ и $y = 0$ для уравнения (1) в прямоугольной области и в вертикальной полуполосе;

- задач типа E для уравнения (1) в прямоугольной области и в вертикальной полуполосе.

- задачи о скачке в вертикальной полосе для уравнения (1).

- задачи для уравнения (1) при $p \geq \frac{1}{2}$, $\lambda \leq 0$ в первом квадранте, в которой 1) на полупрямой $x = 0$, $y > 0$ произведение производной по нормали искомой функции и весовой функции должно быть равно нулю, 2) на отрезке $y = 0$, $0 < x < a$ произведение искомой функции и весовой функции должно иметь заданные значения, 3) на полупрямой $y = 0$, $x > a$ произведение производной по нормали искомой функции и весовой функции должно быть равно заданным значениям.

- нелокальной задачи в вертикальной полуполосе с весовым условием на производную по нормали от искомой функции на отрезке $y = 0$, $0 < x < 1$ для уравнения (1) при $\mu = 0$, $\lambda < 0$.

2) Доказательство существования и неединственности решения нелокальной задачи в вертикальной полуполосе с весовым условием на искомую функцию для уравнения (1) при $\mu = 0$, $\lambda > 0$.

3) Нахождение дополнительного условия, обеспечивающего единственность решения нелокальной задачи из пункта 2).

Достоверность полученных в работе результатов достигается использованием классических методов теории уравнений в частных производных. Также в диссертации произведено сравнение полученных результатов с результатами одной из работ, обобщенных в данном исследовании.

Апробация работы.

Материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

1) I всероссийской конференции молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик, 2010 г.;

2) конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения", Са-

мара, 2011 г.;

3) Восьмой Всероссийской конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи", Самара, 2011 г.;

4) международной конференции "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел", Белгород, 2011 г.;

5) Третьей международной конференции "Математическая физика и ее приложения", Самара, 2012 г.;

6) семинаре кафедры высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета (научный руководитель д.ф.-м. наук, проф. К.Б. Сабитов) 2011, 2012 гг.;

7) семинаре кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (научный руководитель д.ф.-м. наук, проф. Л.С. Пулькина), 2011, 2012 гг.;

8) семинаре кафедры функционального анализа и его применений ВМК МГУ (научный руководитель - академик РАН Е.И. Моисеев), 2013 г.;

9) семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Поиволжского) федерального университета (научный руководитель - д.ф.-м.н., проф. В.И. Жегалов), 2013 г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [10] семь из которых ([1] – [7]) представлены в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 24 параграфа, заключения и списка литературы, включающего 78 наименований. Общий объем работы составляет 107 страниц.

Основное содержание работы

Во **введении** дается краткий обзор публикаций, связанных с темой диссертационного исследования, обосновывается актуальность тематики диссертационной работы, представлены ее цели, задачи, результаты и краткое содержание.

В **первой главе** "Краевая задача в прямоугольной области" в прямоугольнике $D_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < a, \;\; 0 < y < b\}$ исследуется разрешимость задачи типа Дирихле. Основные результаты опубликованы в работе [9].

В параграфе 1.1 приводится постановка краевой задачи D1 для уравнения (1), которая при $\mu, p < \frac{1}{2}$ является задачей Дирихле с условиями

$$u(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \qquad u(x, b) = 0, \quad x \in [0, a]; \tag{3}$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad y \in [0, b], \qquad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, a]. \tag{4}$$

При других комбинациях значений параметров μ и p условия поставленной задачи претерпевают следующие изменения. Если $\mu \geq \frac{1}{2}$, то первое равенство в условии (4) нужно заменить на

$$\lim_{x \to 0} x^{2\mu - 1} u(x, y) = \psi(y), \quad y \in [0, b], \quad \text{при} \quad \mu > \frac{1}{2}; \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x, y)}{\ln x} = \psi(y), \quad y \in [0, b], \quad \text{при} \quad \mu = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Аналогично, если $p \geq \frac{1}{2}$, то второе равенство в условии (4) нужно заменить на

$$\lim_{y \to 0} y^{2p - 1} u(x, y) = \varphi(x), \quad x \in [0, a], \quad \text{при} \quad p > \frac{1}{2}; \tag{7}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{u(x, y)}{\ln y} = \varphi(x), \quad x \in [0, a], \quad \text{при} \quad p = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Ранее краевые задачи для частных случаев уравнения (1) в ограниченных областях, лежащих в первом квадранте, исследовались в работах Л.Е. Востровой[8], И.А. Макарова[9], О.А. Маричева[10], М.С. Салахитдинова,

[8] Вострова Л.Е. Смешанная задача для уравнения $uxx + u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Волжский математический сборник. 1969. Вып.7. С.17-20

[9] Макаров И. А. Решение задачи Коши, Коши-Гурса и задачи N для уравнения с двумя линиями вырождения // Волжский математический сборник. 1966. Вып.5. С.198-210

[10] Маричев О. И. Сингулярные краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1976. Т.230 №3. С.523-526.

А. Хасанова[11] и др.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является то, что решения ищутся как при положительных, так и при отрицательных значениях коэффициента λ, а на коэффициенты μ и p не накладывается каких-либо ограничений.

В параграфе 1.2 формальное решение задачи D1 строится в виде ряда. При $\mu, p \geq \frac{1}{2}$ оно находится методом Фурье с использованием разложения в ряд Фурье-Бесселя.

Для других значений параметров μ и p формальное решение получается из решения при $\mu, p \geq \frac{1}{2}$ с помощью принципа соответствия для уравнения (1), приведенного в монографии С.Г. Самко, А.А. Килбаса и О.И. Маричева[12].

Существование решения поставленной задачи установлено в параграфе 1.3 через доказательство равномерной сходимости соответствующих рядов.

Результат данного параграфа формулируется в виде следующей теоремы:

Теорема 1. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывно дифференцируемы и имеют ограниченное изменение на полуинтервалах $(0, a]$ и $(0, b]$ соответственно и следующую асимптотику вблизи нуля $\varphi(x) = o(x^{-\mu-1+\delta})$ при $x \to 0$, $\psi(y) = o(y^{-p-1+\delta})$ при $y \to 0$ для некоторого числа $\delta > 0$, а также $\lambda \neq \left(\frac{r_n}{a}\right)^2 + \left(\frac{q_l}{b}\right)^2$ для любых $n, l \in N$, тогда решение задачи D1 существует, за исключением двух случаев, когда для параметра λ выполняется свойство $\lambda = \left(\frac{r_m}{a}\right)^2$ $\left(\lambda = \left(\frac{q_m}{b}\right)^2\right)$ для некоторого $m \in N$ и $p = \frac{1}{2}$ $(\mu = \frac{1}{2})$, где r_n (q_m) - нули функции Бесселя $J_{\mu-\frac{1}{2}}(z)$ $(J_{p-\frac{1}{2}}(z))$, пронумерованные в порядке возрастания.

В параграфе 1.4 доказывается единственность решения задачи D1. Доказательство опирается на построение такой неособой замены искомой функции, чтобы к получившемуся в результате замены уравнению был применим принцип экстремума для эллиптических уравнений.

Результатом параграфа 1.4 является теорема:

[11]Салахитдинов М. С., Хасанов А. Об одной задаче для осесимметрического уравнения Гельмгольца // Доклады АМАН. 2011. С.109–116

[12]Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Теорема 2. При $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$ или $\lambda < \left(\frac{q_1}{b}\right)^2$ решение задачи D1 единственно.

Параграф 1.5 посвящен рассмотрению задачи типа E при $\mu \geq \frac{1}{2}$ или $p \geq \frac{1}{2}$, которая получается из задачи, поставленной в параграфе 1.1, если заменить условия на линии вырождения $x = 0$ (задача E1) или на линии вырождения $y = 0$ (задача E2) на условие ограниченности решения на соответствующей линии. Подобная задача с условием ограниченности решения на линии вырождения, но для другого уравнения, впервые была поставлена и изучена в статье М.В. Келдыша[13].

Задачи типа E в ограниченных областях для различных частных случаев уравнения (1) были рассмотрены в работах
И.А. Макарова[14], В.А. Носова[15], С.П. Пулькина[16] и др.

Отличительной особенностью данной задачи является то, что решение строится как для положительных, так и для отрицательных значений λ.

В диссертационной работе показывается, что из однозначной разрешимости задачи D1 следует существование и единственность решения задачи типа E.

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x)$ $(\psi(y))$ непрерывно дифференцируема и имеет ограниченное изменение на полуинтервале $(0, a]$ $((0, b])$ и следующую асимптотику вблизи нуля $\varphi(x) = o(x^{-\mu-1+\delta})$ $(\psi(y) = o(y^{-p-1+\delta}))$ для некоторого числа $\delta > 0$, тогда, при $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$, решение задачи E1 (E2) существкет и единственно.

Вторая глава "Краевые задачи в бесконечных областях" посвящена исследованию четырех краевых задач для уравнения (1) в областях $D_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < a \;\; 0 < y < +\infty\}$ и $D_3 = \{(x, y) \mid 0 < x < a \;\; y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$. Большинство результатов изложенных в данной главе опубликовано в работах [3] – [8], [10].

[13]Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Доклады АН СССР. 1951. Т. 77. №2. С.181-183

[14]Макаров И. А. Теоремы единственности решения задач D, E и типа N // Волжский математический сборник. 1968. Вып.6. С.142-144

[15]Носов В. А. Решение двух сингулярных задач для одного уравнения эллиптического типа // Волжжский матеатический сборник. 1971. Вып.8. С.160-167

[16]Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, 1958. Вып.21. С.3–54

В параграфе 2.1 приведена постановка краевой задачи D2 для уравнения (1) в области D_2. На линии сингулярности $y = 0$ условие задачи имеет такой же вид, как и в задаче, поставленной в параграфе 1.1, также заданы следующие условия на искомую функцию

$$u(0, y) = q_1(y), \quad y > 0, \quad \text{при} \quad p < \frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x, y)}{\ln x} = q_1(y), \quad y > 0, \quad \text{при} \quad p = \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\mu-1} u(x, y) = q_1(y), \quad y > 0, \quad \text{при} \quad p > \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$u(a, y) = q_2(y), \quad y > 0, \tag{12}$$

$$u(x, y) = O(y^\alpha), \quad y \to \infty, \quad \text{для некоторого действительного } \alpha. \tag{13}$$

Для частного случая уравнения (1) при $\mu = 0$, $\lambda = 0$ подобная задача была исследована Е.В. Шимковичем[17], настоящая работа развивает методы, примененные в публикации Е.В. Шимковича, и обобщает ее результаты.

Формальное решение поставленной задачи строится в параграфе 2.2 в виде суммы $u(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y)$, где слагаемые при $\mu, p > \frac{1}{2}$ удовлетворяют видоизмененным условиям исследуемой задачи, а именно, для V_1 условие на горизонтальном участке границы изменяется на однородное (с нулевой правой частью), для $V_2(x, y)$ таким же образом изменяются условия на вертикальных участках границы.

Для построения $V_1(x, y)$ методом разделения переменных находится частное решение уравнения (1). Функция $V_1(x, y)$ выражается в виде интеграла от найденного частного решения, при этом интегрирование производится по константе разделения. Полученный таким образом интеграл имеет вид преобразования Ханкеля и содержит две неизвестные функции от константы разделения. Данные неизвестные функции определяются при помощи обратного преобразования Ханкеля.

[17]Шимкович Е.В. О весовых краевых задачах для вырождающегося уравнения эллиптического типа в полуполосе // Литовский математический сборник. 1990. №30. С.185–196

Функция $V_2(x, y)$ находится тем же методом, что и решение задачи D1.

С помощью доказательства равномерной сходимости соответствующих рядов и интегралов существование решения задачи D2 получено в параграфе 2.3.

Результат параграфа 2.3 формулируется в виде теоремы:

Теорема 4. Пусть $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$ тогда, если функции $\varphi(x)$ и $q_i(y)$, $i = 1, 2$ непрерывны, первая имеет непрерывную производную и ограниченное полное изменение на интервале $(0, a)$, а вторые имеют ограниченное полное изменение на любом интервале $(0, R)$, $R > 0$, $q_2(y)$ - дважды непрерывно дифференцируемая, а кроме того выполняются соотношения $\varphi(x) = o(x^{-\mu-1+\delta})$ при $x \to 0$, $q_i(y) = o(y^{-p-1+\delta})$ при $y \to 0$, $q_i(y) = o(y^{-p-1-\delta})$ при $y \to +\infty$ для некоторого числа $\delta > 0$, то решение задачи D2 существует.

Единственность решения рассматриваемой задачи установлена в параграфе 2.4 способом, аналогичным изложенному в параграфе 1.4. Доказана теорема:

Теорема 5. Решение задачи D2 единственно при $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$.

В параграфе 2.5 поставлены три задачи типа E в области D_2, которые получаются из задачи D2. Для задачи E3 условие ограниченности решения задается на прямой $y = 0$, для E4 - на прямой $x = 0$, а для E5 - на обоих прямых. Однозначная разрешимость данных задач следует из однозначной разрешимости задачи D2.

Таким образом, верны три теоремы:

Теорема 6. Пусть функция $q_2(y)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет конечную полную вариацию на всяком интервале $(0, R)$, $R > 0$, а также следующую асимптотику $q_2(y) = o(y^{-p-1-\delta})$, $y \to +\infty$, $\delta > 0$, тогда при $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$ решение задачи E5 существует и притом единственно.

Теорема 7. Пусть функция $q_1(y)$, непрерывна, имеет конечную полную вариацию на всяком интервале $(0, R)$, $R > 0$, $q_2(y)$ дважды непрерывно дифференцируема и имеет конечную полную вариацию на всяком интервале $(0, R)$, $R > 0$, пусть также верны следующие асимптотики $q_i(y) = o(y^{-p-1-\delta})$, $y \to +\infty$, $\delta > 0$, тогда при $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$ решение задачи E3 существует и притом единственно.

Теорема 8. Пусть выполнены требования теоремы 5 и следующие условия: $q_2(y) = o(y^{-p-1+\delta})$, $y \to 0$, $\delta > 0$, $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, имеющая конечную полную вариацию на интервале $(0, a)$, тогда при $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$ задача E4 имеет единственное решение.

Параграф 2.6 посвящен постановке задачи о скачке в области D_3. В задаче требуется найти решение уравнения (1), равное нулю на правой границе области. На левой границе области в зависимости от значения параметра μ равняться нулю должно или само решение, или произведение решения и весовой функции. На участке линии вырождения $y = 0$ задается "скачок", смысл которого в равенстве заданной функции разности односторонних пределов специального вида. При $p > \frac{1}{2}$ "скачок" означает выполнение равенств

$$\lim_{y \to 0+} y^{2p-1} u(x, y) - \lim_{y \to 0-} (-y)^{2p-1} u(x, y) = r(x),$$

$$\lim_{y \to 0+} y^{2p} u_y(x, y) - \lim_{y \to 0-} (-y)^{2p} u_y(x, y) = q(x).$$

При других значениях p соответствующим образом изменяется вид весовых функций, входящих в пределы.

Данная задача является обобщением задачи о скачке для обычного уравнения Гельмгольца, рассмотренной в работе Н.Б. Плещинского[18]. К такой задаче приводится скалярная задача о падении на плоскую границу раздела сред горизонтально поляризованных волн.

В параграфе 2.7 решение задачи о скачке строится в виде ряда, отдельно, для полуполосы лежащей выше прямой $y = 0$ и для полуполосы лежащей ниже прямой $y = 0$. Для получения каждого ряда используются результаты параграфа 2.2 и свойства оператора $H^{\lambda}_{\mu,p}$. В построенных таким образом рядах остаются неизвестными числовые коэффициенты. Используя заданный на прямой $y = 0$ "скачок", определяются значения данных числовых коэффициентов.

Существование решения задачи о скачке устанавливается в параграфе 2.8 путем доказательства равномерной сходимости соответствующих рядов.

[18] Плещинский Н. Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах // Препринт ПМФ-03-02. Казань: Казан. матем. об-во, 2003.- 30 с.

Результат параграфа 2.8 формулируется в виде теоремы:

Теорема 9. Пусть $\lambda < \left(\frac{r_1}{a}\right)^2$, функции $r(x)$ и $q(x)$ непрерывны, имеют ограниченную вариацию на интервале $(0, a)$ и для них верны соотношения: $r(x) = o(x^{-\mu-\frac{1}{2}+\delta})$, $q(x) = o(x^{-\mu-\frac{1}{2}+\delta})$ при $x \to 0+$ для некоторого числа $\delta > 0$, тогда существует решение задачи о скачке.

Единственность решения рассматриваемой задачи получено в параграфе 2.9. Вопрос о единственности решения задачи о скачке сведен к вопросу о единственности решения двух вспомогательных задач, одна из которых имеет вид задачи D2, единственность ее решения доказана в параграфе 2.4. Вторая вспомогательная задача представляет собой задачу типа N. Единственность решения задачи о типа N установлена с помощью метода, изложенного в статье Е.В. Шимковича. Доказательство основано на построении такой положительной функции $Q(x, y)$, что выполняется свойство $\varepsilon Q(x, y) \pm u(x, y) > 0$ в D_2, где ε - произвольное сколь угодно малое положительное число. Из данного свойства следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D_2. Таким образом, доказана теорема:

Теорема 10. При $\lambda < 0$ решение задачи о скачке единственно.

В параграфе 2.10 ставится следующая задача:

Задача ND. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$H^{\lambda}_{\mu,p}[u(x,y)] = 0, \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\mu} u_x(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in (0,\infty), \quad \mu > -\frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{u_x(x,y)}{x\ln x} = 0 \quad \text{при} \quad y \in (0,\infty), \quad \mu = -\frac{1}{2}, \tag{16}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{-1} u_x(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in (0,\infty), \quad \mu < -\frac{1}{2} \tag{17}$$

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} u(x,y) = l_1(x), \quad \text{при} \quad y \in (0,a], \quad p > \frac{1}{2}, \tag{18}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(x,y)}{\ln y} = l_1(x), \quad \text{при} \quad y \in (0,a], \quad p = \frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$\lim_{y\to 0} y^{2p}u_y(x,y) = l_2(x), \quad \text{при} \quad y \in [a,+\infty), \tag{20}$$

где $l_1(x)$, $l_2(x)$ – известные функции достаточной степени гладкости, a – заданное положительное число.

Подобная задача, но для другого частного случая уравнения (1), при $\mu = \frac{1}{2}$, $p = 0$ была рассмотрена в статье И.Н. Александрович[19]. Там же описано приложение такой задачи к исследованию распространения радиоактивной эманации в атмосфере.

Формальное решение задачи ND в виде интеграла получено в параграфе 2.11 тем же методом, что и функция $V_1(x,y)$ в параграфе 2.2.

Существование решения задачи ND установлено в параграфе 2.12. Для этого доказана равномерная сходимость соответствующих интегралов.

Результатом параграфа 2.12 является теорема:

Теорема 11. Если $l_2(a) = 2^{2(1-p)}(p_1+1)l_1(a)$ при $p > \frac{1}{2}$ и $l_2(a) = l_1(a)$ при $p = \frac{1}{2}$, а также $l_1(x) = O(x^{-\mu-1+\delta})$ при $x \to 0$, функция $l_1(x)$ имеет ограниченную вариацию на интервале $(0,a)$, функция $l_2(x) = O(x^{-\mu_1-1-\delta})$, $\delta > 0$, функция $l_2(x)$ имеет ограниченное полное изменение на любом интервале (a,R), тогда решение задачи ND существует.

Единственность решения задачи ND доказана в параграфе 2.13. Способ доказательства тот же, что и в параграфе 1.4.

Таким образом верна следующая теорема.

Теорема 12. Решение задачи ND единственно.

Третья глава "Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе" посвящена исследованию двух нелокальных краевых задач в полуполосе $\{(x,y) \mid 0 < x < 1, \quad 0 < y < \infty\}$ для частного случая уравнения (1) при $\mu = 0$. Основные результаты опубликованы в работах [1] и [2].

В параграфе 3.1 приводится постановка задачи N со следующими условиями

$$H^{\lambda}_{0,p}(u(x,y)) \equiv 0, \quad u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = 0, \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \tag{21}$$

[19] Александрович И. Н. О решении краевых задач для уравнения Гельмгольца // Сборник трудов научной конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" Канев. 1974. С. 78–86

$$\lim_{y\to 0+} y^{-1}u_y(x,y) = \nu(x), \quad p < -\frac{1}{2}, \tag{22}$$

$$\lim_{y\to 0+} \left(y^{-1}\frac{u_y(x,y)}{\ln(y)} \right) = \nu(x), \qquad p = -\frac{1}{2}, \tag{23}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p}u_y(x,y) = \nu(x), \quad 2p > -1, \tag{24}$$

где $\nu(x)$ - известная функция достаточной степени гладкости.

Подобные задачи, но с условием на искомую функцию на линии $y = 0$, были исследованы в статьях М.Е. Лернера, О.А. Репина[20] и Е.И. Моисеева[21], в данной работе используется методика, предложенная Е.И. Моисеевым.

Решение ищется в виде специального биортогонального ряда. В параграфе 3.2 доказывается, что если $\nu \equiv 0$, то все коэффициенты биортогонального ряда равны нулю. Поэтому справедлива теорема:

Теорема 13. Если решение задачи N существует, то оно единственно.

В параграфе 3.3 показано существование решения. Для этого установлена равномерная сходимость соответствующих рядов.

Результат параграфа можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 14. Если $\nu(x) \in C^2[0,1]$, то решение задачи N для уравнения (1) при $\mu = 0$ существует.

Условия второй из рассматриваемых в данной главе задач приведены в параграфе 3.4. На правой и левой стороне полуполосы они имеют тот же вид, что и условия предыдущей задачи, а на отрезке оси OX – тот же вид что и соответствующее условие задачи D2.

В параграфе 3.5 решение ищется методом разложения в биортогональный ряд того же вида, однако полученная формула для решения содержит произвольные постоянные, поэтому решение такой краевой задачи неединственно. Если условия рассматриваемой задачи дополнить еще одним условием специального вида, которое описано в четвертом параграфе данной главы (задача M2), то решение получившейся задачи будет единственно.

[20] Лернер М. Е., Репин О. А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравненя. 2001. Т.37. №11 С.1562–1564.

[21] Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравненя. 2001. Т.37. №11 С.1565–1567

Основным результатом параграфа является теорема.

Теорема 15. Если решение задачи М2 существует, то оно единственно.

Существование решения задач исследуемых в этой главе доказывается в параграфе 3.6 путем установления равномерной сходимости соответствующих рядов.

Теорема существования решения формулируется следующим образом.

Теорема 16. Если $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, то решения задач М1 и М2 существуют.

Заключение

Выполненное в данной работе исследование позволяет сформулировать следующие основные результаты:

1) Для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца исследованы краевые задачи в прямоугольной области и в вертикальной полуполосе с весовым условиями типа Дирихле. Установлена однозначная разрешимость таких задач.

2) Показано, что из единственности и существования решения задач типа Дирихле в прямоугольнике и вертикальной полосе следует однозначная разрешимость задач типа Е в соответствющих областях.

3) Поставлена задача, обобщающая задачу о скачке для уравнения Гельмгольца на случай обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. Найдены условия существования решения. Установлена единственность решения.

4) Поставлена задача, аналогичная рассмотренной в работе И.Н. Александрович[22], но для других значений параметров уравнения. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

5) Методом разложения в биортогональный ряд найдены решения двух нелокальных краевых задач в бесконечной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца. Доказаны теоремы существования и единственности решения этих задач.

[22] Александрович И. Н. О решении краевых задач для уравнения Гельмгольца // Сборник трудов научной конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" Канев. 1974. С. 78–86

Методы и результаты работы могут быть использованы при исследованиях в теории уравнений в частных производных, а также при решении конкретных задач математической физики.

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Репину Олегу Александровичу за постановку задач и постоянное внимание к исследованию, а также доктору физико-математических наук, профессору Сабитову Камилю Басировичу и доктору физико-математических наук, профессору Пулькиной Людмиле Степановне за ценные замечания.

Публикации автора по теме диссертации

1. Абашкин А. А. Однозначная разрешимость нелокальной задачи для осесимметрического уравнения Гельмгольца/ А. А. Абашкин // Вестник СамГУ. – 2011. – № 2. – С. 5–14. (0,63 п.л.)

2. Абашкин А. А. Об одной нелокальной задаче для осесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Вестник СамГТУ. – 2011. – № 3. – С. 26–34. (1,01 п. л.)

3. Абашкин А. А. Об одной задаче для осесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Доклады АМАН. – 2011. – № 1. – С. 15–20. (0,7 п.л.)

4. Абашкин А. А. Об одной задаче для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца в бесконечной полуполосе / А. А. Абашкин // Вестник СамГТУ. – 2012. – № 1. – С. 39–45. (1,12 п.л.)

5. Абашкин А. А. О задаче типа Дирихле в бесконечной полуполосе для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Научные ведомости БелГУ. – 2012. – № 11. – С. 5–14. (0,92 п.л.)

6. Абашкин А. А. Об одной задаче в бесконечной полосе для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца /

А. А. Абашкин // Вестник СамГУ. – 2012. – №9. – С.5–13. (0,57 п.л.)

7. Абашкин А. А. Об одной весовой краевой задаче для в бесконечной полуполосе для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Известия вузов. Математика. – 2013. – №6. – С.3–12 (0,84 п.л.)

8. Абашкин А. А. Об однозначной разрешимости одной краевой задачи для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Труды восьмой Всероссийской конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара: Самарский технический ун-т, 2011. – С. 8–9. (0,016 п.л.)

9. Абашкин А. А. Об одной краевой задаче в прямоугольнике для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Материалы международной конференции "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел". Белгород: Белгородский ун-т, 2011. — С. 4. (0,08 п.л.)

10. Абашкин А. А. О задаче со скачком для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца / А. А. Абашкин // Третья международная конференция "Математическая физика и ее приложения": Материалы конф. Самара: Самарский технический ун-т, 2012. – С. 17–18. (0,17 п.л.)